12. К анализу трехфазных цепей

В данной работе устанавливается взаимосвязь между фазными и линейными величинами симметричных трехфазных цепей на рис. 12.1 с использованием различных подходов, обеспечивающих более углубленное понимание студентами взаимосвязи этих величин. На рис. 12.1

$$Ua(t) = U_{ам}\sin\omega t \equiv \underline{U}a\cdot e^{j\omega t};\ \underline{U}a = U_{ам}; \qquad (12.1a)$$
$$Ub(t) = U_{bм}\sin(\omega t + 120°) \equiv \underline{U}b\cdot e^{j\omega t};\ \underline{U}b = U_{bм}e^{j120°} = U_{bм}e^{-j240°}; \qquad (12.1b)$$
$$Uc(t) = U_{см}\sin(\omega t + 240°) \equiv \underline{U}c\cdot e^{j\omega t};\ \underline{U}c = U_{см}e^{j240°} = U_{см}e^{-j120°}, \qquad (12.1c)$$

где $\underline{U}a$, $\underline{U}b$, $\underline{U}c$ — комплексные амплитуды фазных напряжений; $\equiv$ — знак соответствия при отображении синусоидальных функций на комплексной плоскости; $\omega = 2\pi f$ — угловая частота, рад/с; f — циклическая частота, Гц; $U_{ам} = U_{bм} = U_{см} = U_м$ — действительные амплитуды напряжения, равные между собой вследствие симметричности системы;

Ra = Rb = Rc — активные (омические) сопротивления нагрузок при четырехпроводном включении звезда-звезда Y-Yo (с нейтралью (нулевым проводом) N и током In в ней) (рис. 12.1, *а*);

Ia = Ib = Ic — линейные токи;

Rab = Rbc = Rca, Iab = Ibc = Ica — сопротивления нагрузок и фазные токи при включении звезда-треугольник (Y-Δ) (рис. 12.1, *в*) и треугольник-треугольник (Δ-Δ) (рис. 12.1, *г*).

Из рис. 12.1, *а* видно, что линейные токи Ia = Ib = Ic = Iл равны фазным Iф, а линейные напряжения можно определить как

$$Uab = Ua - Ub;\ Ubc = Ub - Uc;\ Uca = Uc - Ua. \qquad (12.2)$$

В частности, для определения Uab можно воспользоваться равнобедренным треугольником ANB (рис. 12.1, *б*), в котором стороны NA = Ua, NB = Ub, AB = Uab, угол <ANB = 120°. Опустив с вершины N перпендикуляр NK, из прямоугольных треугольников AKN и BKN получаем Uab = Uл = AK + KB = (Ua + Ub)·sin60° = (Ua + Ub)·0,866 = 1,732·Uф = $(3)^{1/2}$Uф, что соответствует известному соотношению между линейным и фазным напряжением для соединения звезда-звезда.

Теперь воспользуемся другим способом определения этого соотношения, а именно — формулой для суммирования двух синусоидальных величин одинаковой частоты (см. разд. 6.1 в работе [1] и стр. 185 в справочнике [2]). С учетом (12.1) и (12.2) эта формула приобретает следующий вид:

$$Uab = Ua - Ub = U_{aм}\sin\omega t - U_{bм}\sin(\omega t + 120°) = U_{ABM}\sin(\omega t + B_{AB}),$$

где $U_{ABM} = Uл = [(U_{aм})^2 + (-U_{bм})^2 + 2(U_{aм})(-U_{bм})\cdot\cos(120° - 0)]^{1/2} = [(U_{aм})^2 + (-U_{bм})^2 + 2(U_{aм})(-U_{bм})\cdot(-0,5)]^{1/2} = U_м(3)^{1/2} = (3)^{1/2}Uф$;
$B_{AB} = \mathrm{Arctg}\,[(\sin B_A - \sin B_B)/(\cos B_A - \cos B_B)] = \mathrm{Arctg}\,[(\sin 0° - \sin 120°)/(\cos 0° - \cos 120°)] = \mathrm{Arctg}\,[(0 - 0,866)/(1 - (-0,5)] = \mathrm{Arctg}\,[(0 - 0,866)/(1 - (-0,5)] = -30°$.

Таким образом, и в этом случае получаем известное соотношению между линейным и фазным напряжением для соединения звезда-звезда. Кроме того, полученные результаты показывают, что линейное напряжение опережает фазное на 30°, что находится в согласии, но в более явной форме, чем значения острых углов <BAN и <ABN, также равных 30° (см. рис. 12.1, *б*).

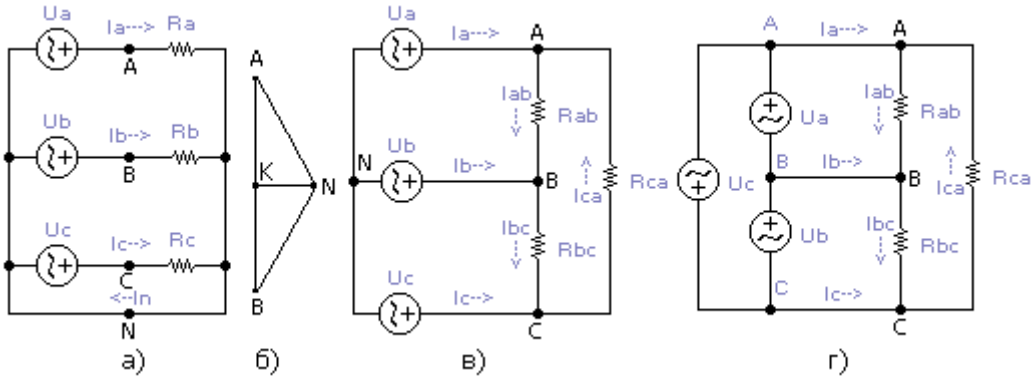


Рис. 12.1. Трехфазные цепи

Обратимся к третьему способу — с использованием изображений синусоидальных функций на комплексной плоскости (символический метод), т. е.

$$Uab = Ua - Ub \equiv \underline{U}a - \underline{U}b = U_м(1 - e^{j120°}).$$

Переходя к алгебраической форме, а затем опять к экспоненциальной, получим:

$\underline{U}_{ABM} = Uл = U_м(1 - e^{j120°}) = U_м(1 - \cos 120° - j\sin 120°) = U_м(1 + 0,5 - 0,866j) = U_м\,(1,5 - 0,866j) = U_м(3)^{1/2}e^{-j30°} = Uф(3)^{1/2}e^{-j30°}$,

т. е. и в этом случае получаем аналогичные результаты.

И, наконец, обратимся к результатам моделирования (схема модели на рис. 12.2), где операция (Ua – Ub) выполняется дифференциальным усилителем на операционном усилителе (ОУ) OU1 и резисто-

рах R, R1—R3 (см. разд. 10.3 в [1]). На OU2 выполнен инвертор для удобства сравнения фазного и линейного напряжения по фазе. Отметим, что для нормального функционирования модели рассматриваемой системы напряжения насыщения ОУ (параметры Vsw+ и Vsw–) увеличены до 600 В.

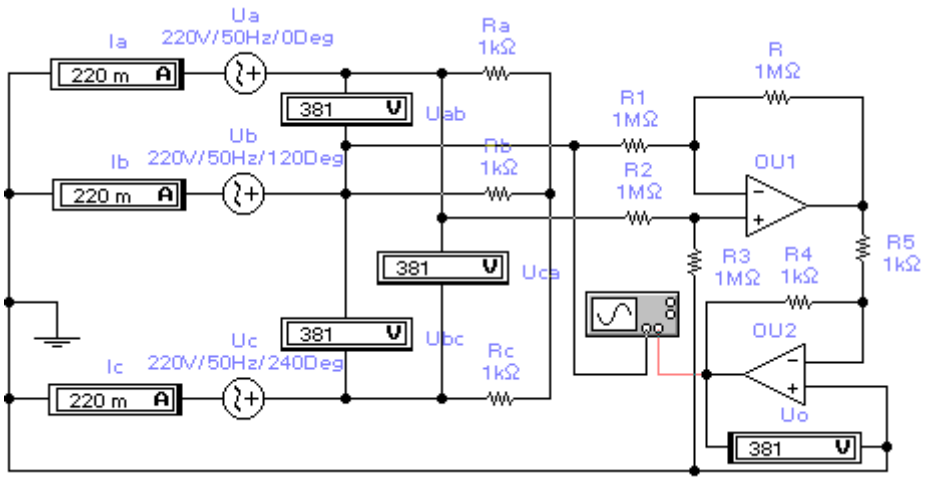


Рис. 12.2. Трехфазная система Y-Yo

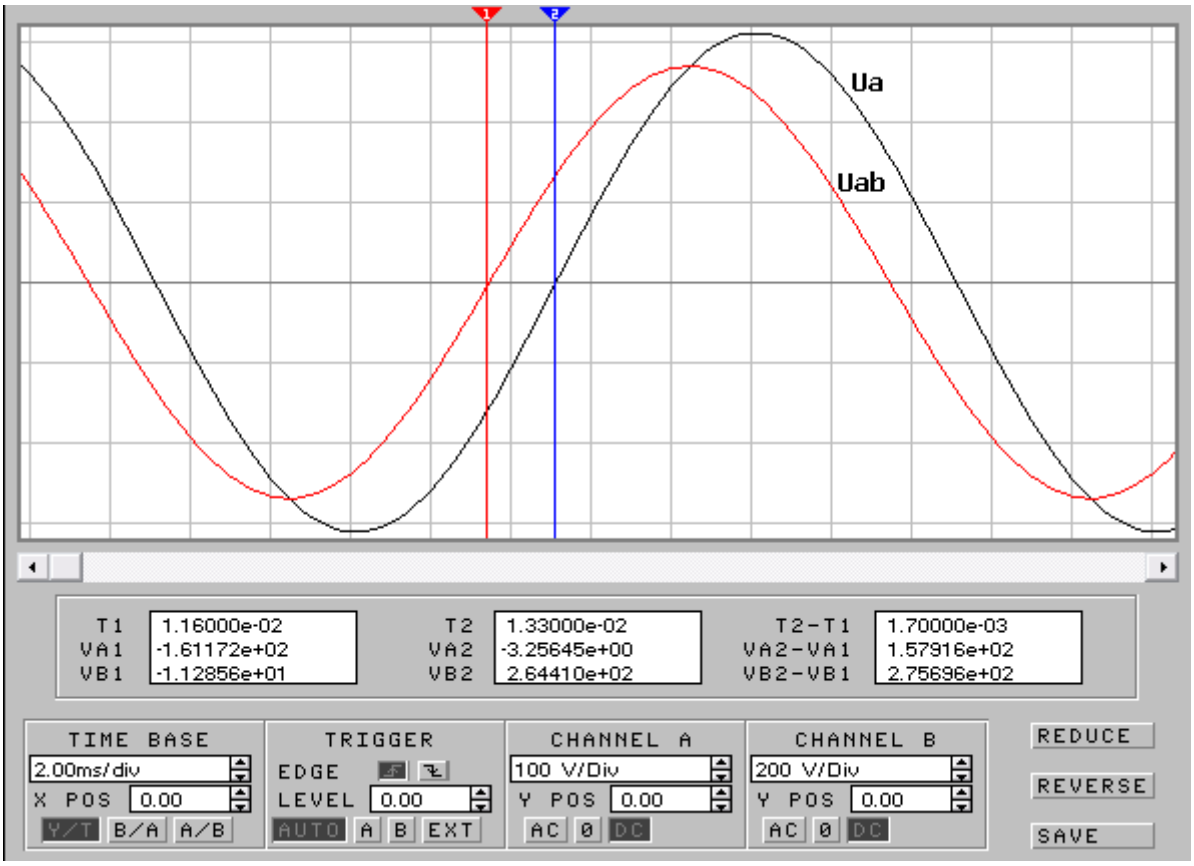


Рис. 12.3. Результаты осциллографических измерений системы Y-Yo

Из осциллограмм на рис. 12.3 видно, что линейное напряжение Uab опережает фазное Ua на T2-T1 = $1{,}7\cdot10^{-3}$ с или (T2-T1)·f·360° =

$1{,}7\cdot10^{-3}\cdot50\cdot360° = 30{,}6°$ (см. разд. 6.1 в [1]), что с учетом ошибки установки визирных линеек 1 и 2 совпадает с расчетными значениями. Устанавливая визирные линейки на максимальные значения Uam и Uabm, получим Uabm/Uam = Uлм/Uфм = VB2/VA1 = 538/311 = 1,73 ≈ $(3)^{1/2}$, что также совпадает с расчетным значением.

Из сравнения использованных методов анализа трехфазной цепи видно, что символический метод суммирования синусоидальных величин является более простым по объему вычислений по сравнению со «школьным». Это было бы особенно заметно при суммировании трех и более синусоидальных величин. Поэтому далее будем пользоваться только таким методом.

Для соединения звезда-треугольник (рис. 12.1, *в*) Uл = Uф и, как показано выше для системы 380/220, равно 381 В, а при наличии нулевого провода доступно и Uф = 220 В, что является существенным достоинством такой схемы соединения. Для соединения треугольник-треугольник (рис. 12.1, *г*) Uл = Uф и доступно только Uл = Uф = 220 В.

Из рис. 12.1, *в*, *г* на основании первого закона Кирхгофа получаем

для узла A: Ia + Ica – Iab = 0;
для узла B: Ib + Iab – Ibc = 0;
для узла C: Ic + Ibc – Ica = 0,

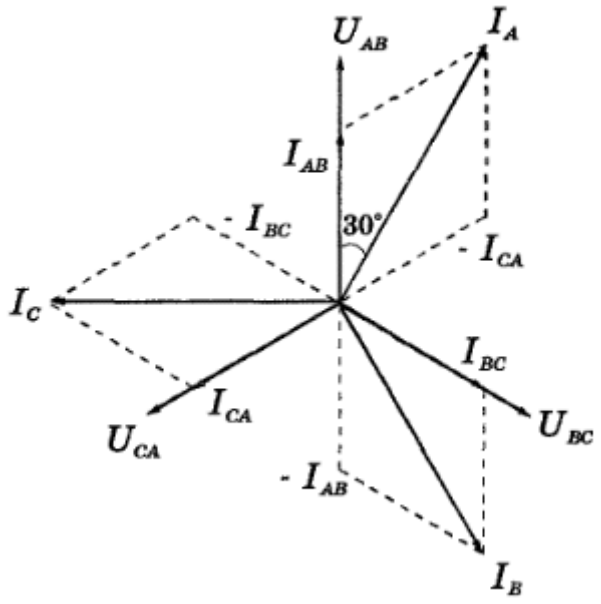
откуда Ia = Iab – Ica; Ib = Ibc – Iab; Ic = Ica – Ibc. (12.3)

Дополнительной иллюстрацией к формулам (12.3) является диаграммы на рис. 12.4. Поскольку система симметрична, то ограничимся определением одного из линейных токов, например, тока Ib = Ibc – Iab. Для нахождения составляющих этого тока обратимся к схеме на рис. 12.1, *в.* Используя второй закон Кирхгофа для контуров NBA и NBC и принимая, в силу симметричности нагрузок, Rab = Rbc = Rca = Rn, получим:

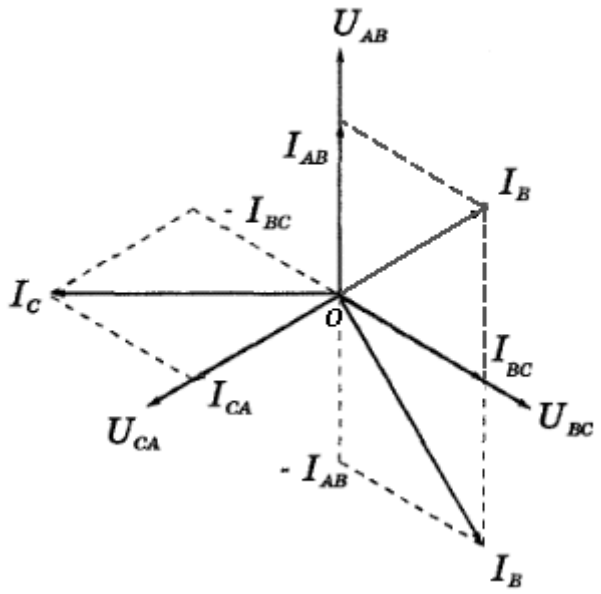
$$Ua - Ub + Iab\cdot Rn = 0;\ Ub - Uc + Ibc\cdot Rn = 0,$$

откуда с учетом равенства действующих значений фазных напряжений (Ua = Ub = Uc = Uф) и фазных токов нагрузки

$$Iab = (Ub - Ua)/Rn \equiv (\underline{U}b - \underline{U}a)/Rn = U\text{ф}\cdot(e^{j120°} - 1)/Rn = I\text{ф}\cdot(e^{j120°} - 1) = I\text{ф}\cdot(\cos120° + j\sin120° - 1) = I\text{ф}\cdot(-0{,}5 + j0{,}866 - 1) = I\text{ф}\cdot(3)^{1/2}e^{-j30°} = (220/1000)\cdot(3)^{1/2}e^{-j30°} = 0{,}381\ e^{-j30°}\ \text{A} = 381\ e^{-j30°}\ \text{mA} \qquad (12.4)$$



а)



б)

Рис. 12.4. Топографические диаграммы для соединения Y-Δ [4]

Формула (12.4) отображает зависимость фазного тока нагрузки Iab от фазного тока Iф источника питания. При этом модуль вектора Iab = Iф·$(3)^{1/2}$ опережает Iф на 30° и совпадает по фазе с линейным напряжением Uab (см. рис. 12.4), которое, как было показано выше, опережает Ua также на 30° и по модулю равно Ua·$(3)^{1/2}$. Очевидно, что модуль Iab можно было определить непосредственно из схемы на рис. 12.1, *в*, из которого видно, что линейное напряжение Uab является падением напряжения на Rab.

Рассчитываем ток Ibc:

$$Ibc = (Uc - Ub)/Rn \equiv (\underline{U}c - \underline{U}b)/Rn = Uф\cdot(e^{j240°} - e^{j120°})/Rn = Iф\cdot e^{j120°}(e^{j120°} - 1) = Iф\cdot(3)^{1/2}e^{-j30°}e^{j120°} = (220/1000)\cdot(3)^{1/2}e^{-j30°}\, e^{j120°} = 0{,}381\, e^{-j30°}\, e^{j120°}\, A = 381e^{-j30°}e^{j120°}\, mA \qquad (12.5)$$

Формула (12.5) отображает зависимость фазного тока нагрузки Ibc от фазного тока Iф источника питания. При этом модуль вектора $Iab = Iф\cdot(3)^{1/2}$ опережает Iф на 30° и совпадает по фазе с линейным напряжением Ubc (см. рис. 12.4), которое, по аналогии с Uab, опережает Ub на 30°, по модулю равно $Ub\cdot(3)^{1/2}$ и сдвинуто относительно Uab на 120° согласно принципу организации трехфазной системы. Как и в случае Iab, модуль Ibc можно определить также непосредственно из схемы на рис. 12.1, *в*, используя линейное напряжение Ubc как падение напряжения на Rbc.

После подстановки (12.4) и (12.5) в (12.3) получаем формулу для линейного тока Ib:

$$Ib = Ibc - Iab \equiv \underline{I}bc - \underline{I}ab = Iф\cdot(3)^{1/2}e^{-j30°}(e^{j120°} - 1) = Iф\cdot(3)^{1/2}e^{-j30°}\cdot(3)^{1/2}e^{-j30°} = 3\cdot Iф\cdot e^{-j60°} = 3(220/1000)\, e^{-j60°} = 0{,}66\, e^{-j60°}\, A = 660\, e^{-j60°}\, мА. \qquad (12.6)$$

Формула (12.6) отображает линейный ток Ib как сумму фазных токов нагрузки Ibc и Iab. Как следует из рис. 12.4, *б*, вектор Ib вследствие равенства векторов Ibc и Iab делит угол < IbcOIab = 120° пополам и, следовательно, повернут относительно вектора Ibc против часовой стрелки на 60°, т. е. опережает его на 60°, что соответствует формуле (12.6).

Обратимся к результатам моделирования трехфазной системы Y-Δ на рис. 12.5, где операция суммирования векторов Ibc и –Iab (см. рис. 12.4) выполняется сумматором на OU1 с инвертором на OU2 для удобства интерпретации результатов осциллографических измерений. Поскольку осциллограф может работать только с напряжением, то для преобразования токов Ibc и Iab в напряжения используются внутренние сопротивления Ria = 1 мОм амперметров Ibc и Iab и, кроме того, заземлена фаза B для обеспечения работы как осциллографа, так и сумматора с инвертором. При этом падения напряжения на Ria от токов Ibc и Iab будут находиться в противофазе, поскольку измеряются относительно заземления с противоположных сторон, что и соответствует определению вектора Ib как суммы векторов Ibc и –Iab (см. рис. 12.4).

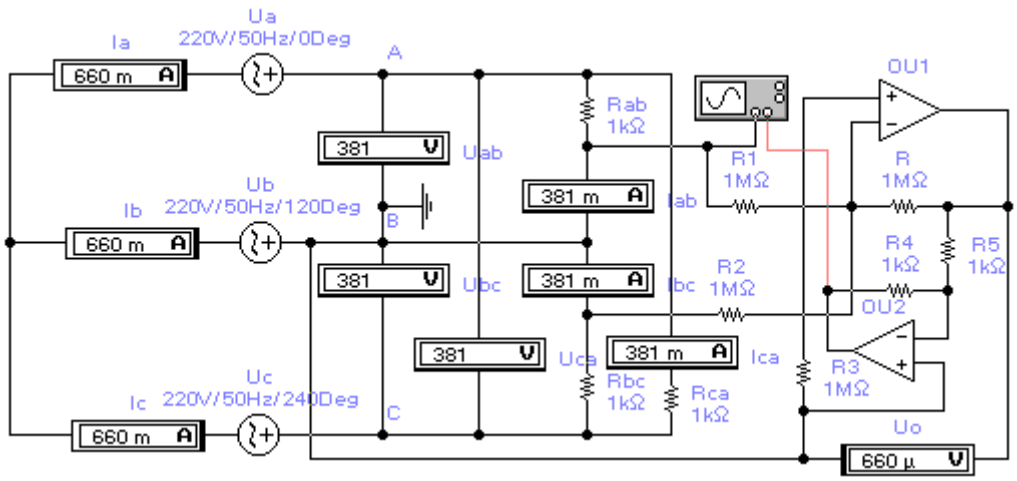


Рис. 12.5. Трехфазная система Y-Δ

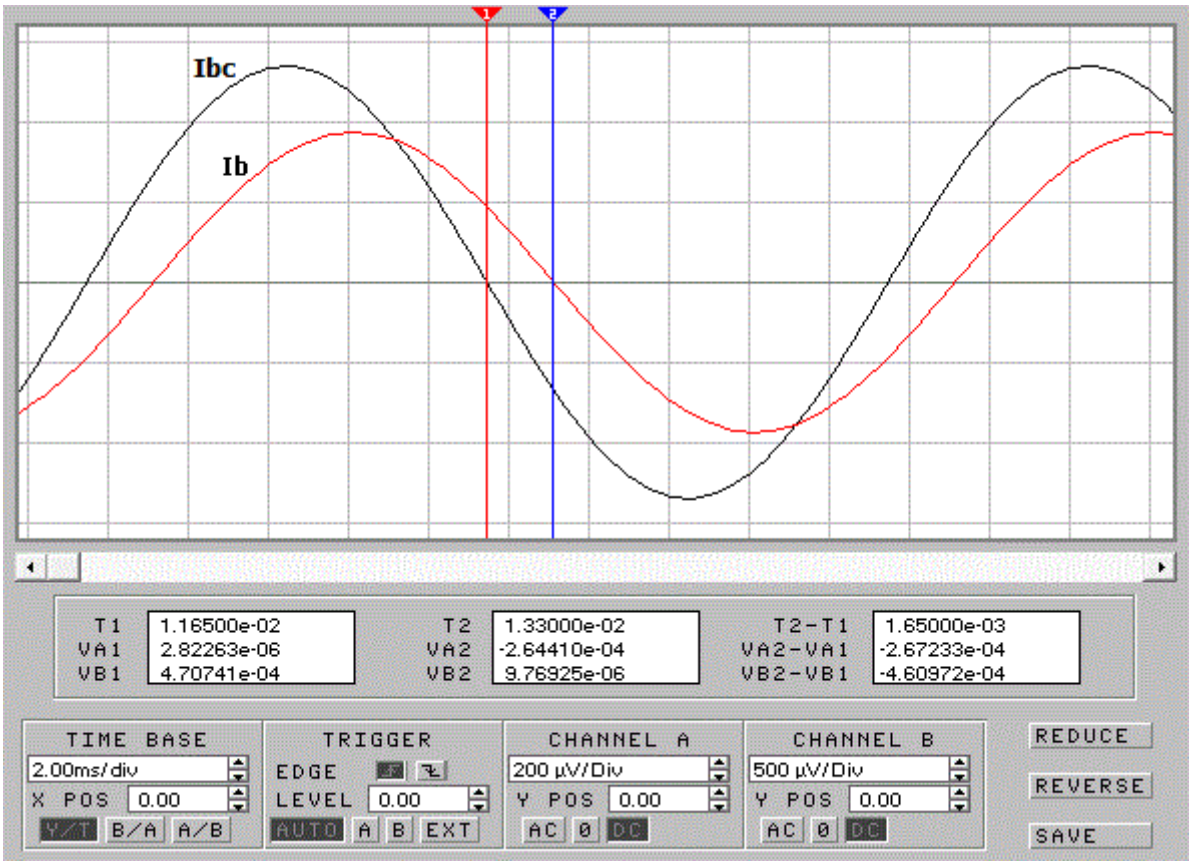


Рис. 12.6. Результаты осциллографических измерений системы Y-Δ

Модуль вектора Ib равен Uo/Ria = $660 \cdot 10^{-6}/10^{-3} = 660 \cdot 10^{-3}$ A = 660 мА (см. показания вольтметра Uo и амперметра Ib), а его аргумент определяется как половина угла <–IabOIbc = 60°, т. е. 30° (см. рис. 12.4). Эти величины можно проверить также и по осциллограммам на рис. 12.6. Модуль определяется делением 0,707 амплитудного значения Ib на Ria = 1 мОм, а аргумент — как T2-T1 = $1{,}65 \cdot 10^{-3}$ с или (T2-T1)·f·360° = $1{,}65 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot 360°$ = 29,7°, что с учетом ошибки установки визирных

линеек 1 и 2 совпадает с расчетным значением. Кроме того, из рис. 12.6 видно, что ток Ib опаздывает относительно тока Ibc на 30°, что находится в согласии с данными на рис. 12.4, где вектор Ib повернут относительно вектора Ibc по часовой стрелке на 30°, что принято считать как запаздывание.

В заключение приведем дополнительные сведения по истории создания многофазных систем [3]. Первая система — двухфазная (два напряжения одинаковой амплитуды и частоты, сдвинутых по фазе на 90°) — была предложена известным югославским электротехником Н. Тесла (в его честь названа единица индукции магнитного поля — тесла (Тл)), однако широкого распространения она не нашла.

Более совершенной оказалась трехфазная система, разработанная в 1889 г. нашим соотечественником М. О. Доливо-Добровольским, который не только разработал ее теорию, но и осуществил в 1891 г. ее практическую реализацию в виде линии электропередачи (ЛЭП) длиной 175 км, связывающую электростанцию на водопаде Неккар и Всемирную техническую выставку во Франкфурте-на-Майне. Гидротурбина на этом водопаде приводила в действие трехфазный генератор, напряжение которого повышалось трехфазным трансформатором до 8500 В. Во Франкфурте это напряжение понижалось другим трансформатором до 65 В, которым питались 1000 ламп накаливания и водяной насос с приводом от трехфазного асинхронного двигателя. Коэффициент полезного действия (КПД) такой ЛЭП достигал невиданной по тем временам величины в 77,4% при передаваемой мощности 220 кВА. Так, ЛЭП постоянного тока напряжением 2000 В длиной 57 км, построенная французским электротехником Депре, имела КПД всего лишь 22%. Понятно, что ЛЭП М. О. Доливо-Добровольского со всем ее оборудованием привлекла всеобщее внимание электротехников своими достоинствами и трехфазная система быстро заняла ведущее положение в мировой электроэнергетике.

В соответствии с ГОСТом напряжения 127, 220 и 380 В в трехфазной системе приняты стандартными для потребителей низкого напряжения (освещение, бытовые приборы, электроприводы разнообразных станков и т. п.). В настоящее время преимущественное распространение получила система 380/220 В вследствие ее более высокой экономичности из-за меньшего расхода металла на провода при одной и той же передаваемой мощности (за счет меньшего тока).

Заметим, что система 220/127 В, используемая в некоторых странах до сих пор, также имеет свою историю. Дело в том, что первыми лампами освещения были дуговые, которые наиболее устойчиво работали при переменном напряжении 55 В. Соответственно для двух таких ламп, соединенных последовательно, требовалось 110 В, а для четырех — 220В. Эти напряжения еще до изобретения трехфазной системы были приняты как стандартные. На них, и в особенности на напряжение 220 В, изготовлялись не только лампы, но и все электриче-

ские приборы и машины. Поэтому при внедрении трехфазной системы исходили из наиболее подходящего напряжения — 220 В, при этом фазное напряжение составляет около 127 В.

Литература

1. Карлащук В. И. Электронная лаборатория на IBM PC / Том. I. Моделирование элементов аналоговых систем на Electronics Workbench и MATLAB. Изд. 6-е пер. и доп. М.: Солон-Пресс, 2006, 672 с.
2. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУзов. М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1953, 608 с.
3. Евсюков А. А. Электротехника: Учеб. пособие для студентов физ. спец. пед. ин-тов.— М.: Просвещение, 1979, 248 с.
4. Синдеев Ю. Г. Электротехника с основами электроники. Учебное пособие. 6-е изд. — Ростов н/Д, Феникс, 2005, 368 с.

Первая редакция — 12.02.2012, вторая — 27.09.2014 г.